Das Masse-Energie-Äquivalent in der Thermodynamik

Thomas Belau

12. Dezember 2025

Zusammenfassung

Wir alle wissen, daß Einstein das Masse-Energie-Äquivalent für Teilchen hergeleitet hat, die mit einer kinetischen Energie beziehungsweise mit einer trägen Masse ausgestattet sind. Was anscheinend bis dato niemandem wirklich aufgefallen respektive wirklich bewußt geworden ist, ist die Tatsache, daß es sich schon aus der elementaren Grundgleichungen der kinetischen Gastheorie bzw. aus den Zustandsgleichungen der Thermodynamik herleiten läßt. Ganz praktisch war schon mit Bernullis Gleichung die Grundlage dafür gelegt. Diese leicht nachzuvollziehende Herleitung sei hier gezeigt.

Es sei angemerkt, daß alle verwendeten Ausgangsgleichungen in jedem Physik-Lehrbuch bzw. bei Wikipedia zu finden sind. Ich weiche lediglich insovern davon ab, als daß vektorielle Größen lediglich mit ihren Beträgen verwendet werden. Das jedoch verfälscht nicht das Ergebnis und ist damit als Vorgehensweise gültig.

Ebenso habe ich an keiner Stelle irgend eine so genannte „künstliche Intelligenz"verwendet. Einerseits habe ich den Grundstein hierfür schon 2008 gelegt, zugegebenermaßen mit vielen Fehlern, als es noch keine derartigen Systeme gab. Andererseits habe ich von den Systemen großer, öffentlich nutzbaren Anbieter bisher noch nichts geehen, was den einsatz rechtfertigt. Einen passenden Prompt zu erarbeiten erfordert meiner Meinung nach ebensoviel Arbeit wie diese Arbeit selbst.

1 Ausgangspunkt Druck und Dichte

Der Druck kann, auf Grund seiner Einheit, als spezifische Energie eines Volumens aufgefaßt werden. Mit dieser Grundannahme kann aus der Definition der Schallgeschwindigkeit im idealen Gas in einfachster Weise ein Zusammenhang zur von Einstein so genannten Ruheenergie hergestellt werden. Die kleine Gleichung — in der ich den eigentlich enthaltenen Isentropenexponenten ganz bewußt entfallen lasse — kann man umstellen und mit einem definieren Volumen erweitern, um aus einer spezifischen Energie die Energie zu berechnen, die gegebenen Volumen beziehungsweise dessen Masse inne wohnt.

$$c = \sqrt{\frac{p}{\rho}} \tag{1}$$
$$p = \rho c^2$$
$$pV_0 = \rho V_0 c^2$$
$$E_0 = m_0 c^2 \tag{2}$$

An dieser Stelle kann gleich festgehalten werden, daß es sich hier um eine potentielle Energie handelt. Ist der Druck eines eingeschlossenen Gasvolumens größer als der Umgebungsdruck, wandelt sich Diese in kinetische Energie durch die Expansion um.

2 Bernullis Gleichung umgeformt

Einen weiteren Puzzle-Stein erhält man aus Bernullis Gleichung. Sie wird dazu genutzt, aus der Differenz zwischen Stau- und statischem Druck die Geschwindigkeit beispielsweise eines Flugzeuges zu berechnen.

$$v^2 = \frac{2(p_1 - p_0)}{\rho}$$

In die Gleichung wird die Dichte eingesetzt, die das Gas für den Druck p_0 hat. Damit stellt sich die Frage nach dem Sinngehalt der Gleichung. Empirisch ist sie gewiß korrekt. aber logisch ist sie schlicht falsch. Mit etwas Umformung wird das logische Problem aber sofort aufgelöst:

$$v^2 = 2\,\frac{p_0}{\rho}\left(\frac{p_1}{p_0} - 1\right)$$

Zur klassischen Berechnung der kinetischen Energie des Objektes, dessen Geschwindigkeit bestimmt wird, wird Bernullis Gleichung lediglich mit der halben Masse dieses Objektes multipliziert. Außerdem wird (1) angewandt.

$$\frac{m_0}{2} v^2 = m_0\, c^2 \left(\frac{p_1}{p_0} - 1\right)$$

Es könnte jetzt einfach gekürzt werden, womit wieder die Ausgangsgleichung entstünde. Das wäre allerdings unsinnig, da die vorherige Gleichung ja gerade erweitert wurde. Links soll stattdessen die kinetischen Energie stehen.

$$E_0 = m_0\, c^2 \left(\frac{p_1}{p_0} - 1\right) \tag{3}$$

Die entstandene Gleichung kann leicht interpretiert werden. Die kinetische Energie in der Gleichung ist die, die durch den Antrieb des Objektes freigesetzt wird und der Verdichtung des Gases dient. Bernullis Gleichung wird zwar nur im Zusammenhang mit dem Einsatz der Prandtlsonde verwendet, ist aber allgemeingültig. Mit Hilfe dieser Gleichung kann jetzt auch der Massezuwachs auf Grund der Bewegung eines Objekts berechnet werden:

$$\frac{E_0}{c^2} = m_0 \left(\frac{p_1}{p_0} - 1 \right)$$

entspricht auch

$$\Delta\, m = m_0 \left(\frac{p_1}{p_0} - 1 \right)$$

Viel mehr als das läßt sich aber letztlich aus Bernullis Gleichung nicht entnehmen.

3 Erweiterung der Grundgleichung der kinetischen Gastheorie

Die Gleichung ist in jedem Physikbuch für Anfänger zu finden:

$$p = \frac{\rho \overline{v^2}}{3}$$

Hiermit können wir zunächst einen Zusammenhang zwischen der Schallgeschwindigkeit und der mittleren Geschwindigkeit der Gasatome bzw. -moleküle herstellen, der später noch nützlich wird:

$$c^2 = \frac{v^2}{3} \tag{4}$$

Für die weiteren Herleitungsschritte ist es noch erforderlich das Quadrat der mittleren Geschwindigkeit der Gasteilchen aufzulösen:

$$\overline{|v|} = \sqrt{\overline{v^2}} \tag{5}$$

Die Gleichung wurde aufgestellt, um den Druck in einem abgeschlossenen, konstanten, ruhenden Gasvolumen zu erklären. Meines Wissens nach wurde aber nie eine Gleichung aufgestellt die beschreibt was passiert, wenn dieses Gasvolumen in Bewegung versetzt wird. Um diese Aufgabe zu bewerkstelligen ist zunächst notwendig nochmals darzulegen, warum die Dichte des Gasvolumens durch drei dividiert wird. Das rührt daher, daß man gemeinhin das Gasvolumen als in einem Kasten eingeschlossen betrachtet ud den Druck zwischen zwei, sich gegenüber liegenden Seiten betrachtet. Hier tritt nur ein drittel der Gasteilchen in Erscheinung. Die anderen beiden drittel bewegen sich - idealisiert betrachtet - senkrecht zu diesen Seiten. Da sie keinen Impuls darauf abgeben, haben sie keinen Einfluß.

Diese Sichtweise ändert sich schlagartig wenn man das Gasvolumen mit einer Geschwindigkeit beaufschlagt. In diesem Fall hat das gesamte Volumen einen anteiligen Einfluß der bei einem Stoß des exemplarischen Kastens mit einem anderen Körper in Erscheinung tritt. In diesem Fall ergibt sich dann die Gleichung zu

$$\begin{aligned}
p &= \rho\left(\frac{\left(v_0+\overline{|v|}\right)^2}{6}+\frac{\left(v_0-\overline{|v|}\right)^2}{6}+\frac{2v_0^2}{3}\right)\\
&= \rho\left(\frac{v_0^2+2v_0\overline{|v|}+\overline{v^2}}{6}+\frac{v_0^2-2v_0\overline{|v|}+\overline{v^2}}{6}+\frac{2v_0^2}{3}\right)\\
&= \rho\left(\frac{v_0^2+\overline{v^2}}{6}+\frac{v_0^2+\overline{v^2}}{6}+\frac{4v_0^2}{6}\right)\\
&= \rho\frac{6v_0^2+2\overline{v^2}}{6}\\
&= \rho\left(v_0^2+c^2\right)
\end{aligned}$$

Es wurden stillschweigend (5) verwendet und in der letzten Zeile (4) eingesetzt. Jetzt wird mit Hilfe des Volumens des Gases die Energie berechnet und c^2 ausgeklammert.

$$E_a = m_0c^2\left(1+\frac{v_0^2}{c^2}\right) \tag{6}$$

Die Energie eines Gasvolumens steigt mit der Bewegungsgeschwindigkeit. Der Grund dafür liegt darin, daß in Ruhe nur ein Teil der enthaltenen Gasmoleküle seine Wirkung in einer bestimmten Richtung entfaltet. In der Bewegung wirkt sich dagegen die Trägheit aller Moleküle in der Bewegungsrichtung aus.

4 Das Masse-Energie-Äquivalent

In den Klammerterm von (6) wird nun (2), nach c^2 umgestellt, eingesetzt und das Resultat in Form gebracht:

$$\begin{aligned}
E_a &= m_0c^2\left(1+\frac{m_0v_0^2}{E_0}\right)\\
&= \frac{m_0c^2}{E_0}\left(E_0+m_0v_0^2\right)\\
E_0E_a &= E_0m_0c^2+m_0^2v_0^2c^2\\
&= m_0^2c^4+m_0^2v_0^2c^2\\
&= c^2\left(m_0^2c^2+m_0^2v_0^2\right)
\end{aligned}$$

Die letzten Schritte zur Formulierung des Masse-Energie-Äquivalentes liegen jetzt auf der Hand. Das Produkt aus Masse und Geschwindigkeit ist der Impuls. Links steht das Quadrat einer Energie. Wie groß das numerisch auch immer sein mag, es bleibt ein Quadrat. Um eine Energie zu berechnen muß also die Wurzel gezogen werden.

$$\begin{aligned} p &= m_0 v_0 \\ E &= c\sqrt{m_0^2 c^2 + p^2} \end{aligned} \tag{7}$$

Wobei es fragwürdig erscheint, ob der Impuls der sich bewegenden Ruhemasse an dieser Stelle überhaupt verwendet werden darf. Das Masse-Energie-Äquivalent in dieser Form gilt definitionsgemäß, wenn ein abgeschlossenes Gasvolumen seine gesamte Energie, also Ruheenergie und kinetische Energie, abgibt. Der Vorgang kann mit einem Ball vesinnbildlicht werden: Wenn ein Ball gegen eine Wand prallt, wird er sich zuerst deformieren. Die Gasteilchen im Inneren geben ihre Energie gemäß (6) ab. Wenn die Spannung der Hülle so hoch wird, daß sie reißt, wird zusätzlich die innere Energie in Form der Expansion des vormals eingeschlossenen Gase frei. Das bedeutet, daß das eingeschlossene Gas keienen Rückstoß bewirkt. Das kann nur dann der Fall sein, wenn eine Art Antrieb dafür sorgt, daß das eingeschlossene Gas mit Hilfe einer Gegenkraft durch die Spannung der Hülle verdichtet wird. Bis deben die Hülle reißt. Deswegen muß (3) an dieser Stelle eine physkalisch gültige Beschreibung liefern, nach der die Berechnung des Impulses zu modifizieren ist. Die Substitution in (7) ist also anzupassen.

$$\begin{aligned} p &= (\Delta m + m_0)\, v_0 \\ E &= c\sqrt{m_0^2 c^2 + p^2} \end{aligned}$$

Die Form ändert sich nicht, sehr wohl aber der Sinngehalt. Es ist der geometrische Mittelwet aus innerer und kinetischer Energie eines abgeschlossenen Gasvolumens.

5 Zusammenfassung

Die Gleichung (2) beschreibt die innere bzw. Ruheenergie eines geschlossenen Gasvolumens. Mit Gleichung (3) wird gezeigt, daß die in Bewegungsrichtung meßbare Energie eines geschlossenen Gasvolumens auf einen virtuellen Massezuwachs zurückzuführen ist der entsteht, weil für den Erhalt einer konstanten Geschwindigkeit in einem Gas Energie für den Antrieb zur Überwindung der Reibung notwendig ist. Zu guterletzt zeigt Gleichung (7) die meßbare Energie bei einem Stoß mit einem sich bewegenden Gasvolumen, wenn dieses dabei expandiert, was den Verlust der einschließenden Hülle bedeutet. Alle drei Gleichungen sind sich der jeweiligen Bedeutung nach völlig wesensfremd. Keine der Gleichungen darf mit einer der jeweils Anderen gleichgesetzt werden, weil sie jeweils völlig unterschiedliche physikalische Aspekte beschreiben.

Die gesamte Herleitung beruht auf einfachsten Grundgleichungen. Der Gültigkeitsbereich ist eingeschränkt. Sie erhebt also keinen Anspruch auf ein vollständiges Standhalten gegenüber der Beobachtung. Was allerdings sehr wohl deutlich wird, ist die Identität der entstandenen Gleichungen zu denen in Einsteins „Speziellen Relativitätstheorie“. Die einzige, sinnvolle Frage die daraus ableitbar ist ist die danach, ob Einstein sich unfreiwillig und unbewußt mit Quantanphysik beschäftigt hat. Es ist nicht abwegig aus den Annahmen der Herleitung über die spezielle Gastheorie zu folgern, daß hier ähnliche - wenn auch weniger komplexe - Zusammenhänge gelten wie in der Quantenphysik. Ungültig wäre aber eine 1:1 Übetragung.